Théorème : Soit A, B, C trois points non alignés du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ tels que les 3 angles du triangle ABC soient strictement inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$. On cherche le minimum sur $\mathbb{R}^2$ de $f(M) = MA + MB + MC$ où $MA = \|\overrightarrow{MA}\|_2$.
Alors f atteint son minimum en un unique point P, à l'intérieur de ABC, distinct de A, B, C et vérifie $\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} = \frac{2\pi}{3}$.

1 : Le minimum est atteint en un unique point P :

- f est continue par continuité de la norme.
- f est coercive : soit O un point quelconque. Alors $\underbrace{OA + AM \geq OM}_{\|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}\| \leq \|\overrightarrow{OA}\| + \|\overrightarrow{AM}\|}$ d'où $MA \geq OM - OA$ et $f(M) \geq 3OM - f(O)$.
  D'où, pour $OM > \frac{2}{3} f(O)$, $f(M) > f(O)$. On peut donc se restreindre au compact $\overline{D}(O, \frac{2}{3} f(O))$.

  justification pas nécessaire, la coercivité étant immédiate
- f est strictement convexe : Soit $M, N \in \mathbb{R}^2$ et $t \in]0,1[$. Alors : $(tM + (1-t)N)A = \|t\overrightarrow{MA} + (1-t)\overrightarrow{NA}\| \leq t\|\overrightarrow{MA}\| + (1-t)\|\overrightarrow{NA}\| = tMA + (1-t)NA$
  avec égalité ssi $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{NA}$ colinéaires. D'où par sommation, $f(tM + (1-t)N) \leq tf(M) + (1-t)f(N)$ avec égalité ssi chaque couple $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{NA})$, $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{NB})$, $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NC})$ est constitué de vecteurs colinéaires.
  Ainsi, pour $M \neq N$, on aurait $A, B, C \in (MN)$ i.e. A, B, C sont alignés $\Rightarrow \Leftarrow$

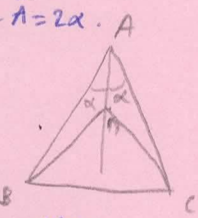
$\Rightarrow$ Puisque f est continue coercive, f admet un minimum global, qui est unique par stricte convexité. On l'appelle P.

2 : P est distinct de A, B, C :

Puisque la somme des angles vaut π, au moins 2 des 3 angles sont $< \frac{\pi}{2}$, par exemple $\hat{B}$ et $\hat{C}$.

i) $P \neq B, C$: Soit H le pied de la hauteur issue de A. Alors $H \neq B, C$ car $\hat{B}, \hat{C} < \frac{\pi}{2}$.
D'où, $f(H) = HA + \underbrace{HB + HC}_{= BC} = \underbrace{HA}_{< BA \text{ par Pythagore}} + BC < BA + BC = f(B)$.
De même, $f(H) < f(C)$. D'où $P \neq B, C$.

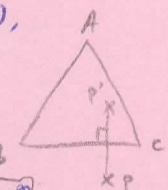
ii) $P \neq A$: Si $\hat{A} < \frac{\pi}{2}$, le même raisonnement montre que $P \neq A$. Supposons donc que $\frac{\pi}{2} \leq \hat{A} < \frac{2\pi}{3}$.
Considérons un point M au voisinage de A situé sur la bissectrice intérieure de l'angle $\hat{A} = 2\alpha$.
On a : $MB^2 = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\|^2 = MA^2 + AB^2 + 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = MA^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}$
$= AM^2 + AB^2 - 2AM.AB.\cos\alpha$
$= AB^2 \left(1 - 2\frac{AM}{AB}\cos\alpha + \frac{AM^2}{AB^2}\right)$



Or, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x)$ donc lorsque M tend vers A sur la bissectrice,
$MB = AB\left(1 - \frac{AM}{AB}\cos\alpha + o(AM)\right) = AB - AM\cos\alpha + o(AM)$. De même, $MC = AC - AM\cos\alpha + o(AM)$
D'où $f(M) = MA + MB + MC = f(A) + (1 - 2\cos\alpha)AM + o(AM)$. Or, $0 < 2\alpha < \frac{2\pi}{3}$ donc $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ donc $\cos\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$
donc $1 - 2\cos\alpha < 0$. Donc pour M suffisamment proche de A sur la bissectrice, $f(M) < f(A)$ d'où $P \neq A$.

3 : P est à l'intérieur de ABC :

Si P est strictement à l'extérieur de ABC, par exemple si P et A sont de part et d'autre de la droite (BC),
On considère le symétrique P' de P par rapport à (BC). Alors $P'A < PA$, $P'B = PB$, $P'C = PC$.
D'où $f(P') = P'A + P'B + P'C < PA + PB + PC = f(P)$.



4 : $\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} = \frac{2\pi}{3}$:

D'après 1), f atteint son minimum P sur le complémentaire de $\{A, B, C\}$ qui est ouvert et $\underbrace{f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur cet ouvert}}_{\text{car polynomiale en les coordonnées de } M}$.
Posons $g_A(M) = MA = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2}$. Alors $f(M) = g_A(M) + g_B(M) + g_C(M)$ et $\partial_x g_A(M) = -\frac{2(x_A - x_M)}{2 g_A(M)}$, $\partial_y g_A(M) = -\frac{y_A - y_M}{g_A(M)}$
D'où $\nabla g_A(M) = -\frac{\overrightarrow{MA}}{MA}$ et $\nabla f(P) = -\Big(\underbrace{\frac{\overrightarrow{PA}}{PA}}_{=: \vec{u}} + \underbrace{\frac{\overrightarrow{PB}}{PB}}_{=: \vec{v}} + \underbrace{\frac{\overrightarrow{PC}}{PC}}_{=: \vec{w}}\Big) = \vec{0}$ car P est un minimum de f donc un point critique de f.

Ainsi, $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont unitaires et vérifient $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$. D'où $1 = \|\vec{w}\|^2 = \|-(\vec{u} + \vec{v})\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} = 2 + 2\vec{u}.\vec{v}$.
D'où, $\vec{u}.\vec{v} = -\frac{1}{2}$. Or, $\vec{u}.\vec{v} = \cos(\widehat{APB})$ et $\widehat{APB} \in [0, \pi]$ car P est à l'intérieur de ABC.
Donc $\widehat{APB} = \frac{2\pi}{3}$ et de même, $\widehat{BPC} = \widehat{CPA} = \frac{2\pi}{3}$.